Leçon 264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Appel
Garet - Kurtzmann
Dreveton - Lhabouz

On se place dans $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

I - Généralités et caractérisation

1. Notion de variable aléatoire discrète

Définition 1.1 On dit qu'une loi μ est discrète s'il existe D dénombrable au fini tel que $\mu(D) = 1$.

On dit qu'une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est discrète si sa loi $\mathbb{P}_X$ est discrète.

Théorème 1.2 Soit X une variable aléatoire discrète. Soit D un ensemble fini ou dénombrable tel que $X(\Omega) \subset D$. Pour tout $i \in D$, on pose $p_i := \mathbb{P}(X = i)$. Alors :

(i) $\mathbb{P}_X = \sum_{i \in D} p_i \delta_i$

(ii) $\mathbb{P}_X$ admet comme densité par rapport à la mesure de comptage sur D la fonction f définie par : $f(x) = \mathbb{1}_D(x) p_x$.

Exemple 1.3 Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in [0,1]$ si sa loi est $\mathbb{P}_X = p\delta_1 + (1-p)\delta_0$. Elle représente une expérience n'ayant que deux issues possibles, baptisées conventionnellement échec et succès, p probabilité de succès.

Exemple 1.4 Une variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0,1]$, si sa loi est $\mathbb{P}_X = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k$. Elle modélise le nombre total de succès lors de la réalisation de n épreuves de Bernoulli indépendantes.

Exemple 1.5 Une variable aléatoire X suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, $p \in [0,1]$, si sa loi est $\mathbb{P}_X = \sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)^{n-1} p \delta_n$. Elle modélise la loi du premier succès.

Exemple 1.6 On dit que X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, si sa loi est donnée par : $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. C'est la probabilité qu'il existe k occurrences d'un processus pendant un laps donné, si le nombre moyen d'occurrences pendant ce laps de temps est λ.

2. Fonction génératrice

Définition 1.7 Une variable aléatoire est dite entière si elle est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Définition 1.8 On appelle fonction génératrice d'une variable entière X la fonction $G_X : t \in [-1,1] \longmapsto \mathbb{E}[t^X] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) t^k$.

Exemples 1.9

- si $X \sim \mathcal{B}(p)$, $G_X(t) = (1-p) + pt$
- si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $G_X(t) = [(1-p) + pt]^n$
- si $X \sim \mathcal{G}(p)$, $G_X(t) = \dfrac{pt}{1-(1-p)t}$
- si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $G_X(t) = e^{-\lambda(1-t)}$

Théorème 1.10 Soit X une variable aléatoire entière. Sur $[0,1[$, la fonction G_X est C^∞ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G_X^{(n)} : t \longmapsto \mathbb{E}[X(X-1)\dots(X-n+1)t^{X-n}]$.

Corollaire 1.11 Soit X entière alors pour tout n, $\mathbb{P}(X=n) = \dfrac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$. En particulier, la fonction génératrice caractérise la loi.

Application 1.12 Soient $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ avec X et Y indépendantes. Alors : $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

Théorème 1.13 Soit X une variable aléatoire entière. Alors $\mathbb{E}[X] < +\infty$ si et seulement si G_X admet une dérivée à gauche en 1. De plus, le cas échéant, on a : $G'_X(1) = \mathbb{E}[X]$.

II - Particularités des variables aléatoires discrètes

1. Moments

Théorème 2.1 Soient X une variable aléatoire et D dénombrable ou fini tel que $X(\Omega) \subset D$. Soit $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ alors $Y = g(X)$ est intégrable si et seulement si $\sum_{i \in D} |g(i)| \, \mathbb{P}(X=i) < +\infty$.

Le cas échéant, on a : $\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{i \in D} g(i) \, \mathbb{P}(X=i)$.

Corollaire 2.2 Soient une variable aléatoire discrète et D dénombrable ou fini. Alors si X est intégrable, $\mathbb{E}[X] = \sum_{i \in D} i \, \mathbb{P}(X=i)$.

Exemples 2.3

- si $X \sim \mathcal{B}(p)$, $\mathbb{E}[X] = p$ et $\mathrm{Var}\, X = p(1-p)$
- si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $\mathbb{E}[X] = np$ et $\mathrm{Var}\, X = np(1-p)$
- si $X \sim \mathcal{G}(p)$, $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$ et $\mathrm{Var}\, X = \frac{1-p}{p^2}$
- si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\mathbb{E}[X] = \lambda$ et $\mathrm{Var}\, X = \lambda$

2. Indépendance

Application 2.4 Soit $(p_k)_k$ la suite des nombres premiers ordonnés. Alors pour tout $s > 1$, $\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{k=1}^{+\infty} (1 - p_k^{-s})$. De plus, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p_k} = +\infty$.

développement 1

Proposition 2.5 Deux variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes si et seulement si : $\forall (x_1, x_2) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega)$, $\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \mathbb{P}(X_1 = x_1)\,\mathbb{P}(X_2 = x_2)$.

Théorème 2.6 Soient X, Y entières et indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

Application 2.7 Soient $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$, $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $X + Y \sim \mathcal{B}(n+m,p)$.

III - Convergence et comportement asymptotique

1. Convergence en loi

Théorème 3.1 (théorème central limite) Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires i.i.d. d'espérance m et de variance $\sigma^2 < +\infty$. Alors : $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} (X_k - m) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Application 3.2 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue bornée. On a : $\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{2k-n}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-x^2/2} \, dx$

développement 2

Théorème 3.3 Soient $(X_n)_n$ et X des variables aléatoires discrètes à valeurs dans D dénombrable ou fini. Alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si et seulement si : $\forall x \in D$, $\mathbb{P}(X_n = x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathbb{P}(X = x)$.

Application 3.4 (TCL poissonien) Soit $S_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ avec $\lim np_n =$. On a alors $S_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$.

2. Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Définition 3.5 On appelle marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$, $(S_n)_n$ définie par $S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i$ où $(X_n)_{n \geq 1}$ i.i.d. de loi $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$.

On s'intéresse au nombre de retours en 0.

Lemme 3.6 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(S_{2n+1} = 0) = 0$.

Lemme 3.7 On a : $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = +\infty$.

Théorème 3.8 (Polya) La marche aléatoire symétrique retourne p.s. une infinité de fois en 0.

Corollaire 3.9 Tout site de $\mathbb{Z}$ est visité p.s. une infinité de fois par la marche.